

Comparación de la nueva proyección cartográfica para Colombia -Origen Nacional-con las proyecciones Gauss-Krüger y cartesiana local

REVISTA **MAPPING**
Vol. 29, 201, 4-14
julio-agosto 2020
ISSN: 1131-9100

Comparison of the new cartographic projection for Colombia -National Origin-with the Gauss-Krüger and local cartesian projections

Edilberto Niño-Niño

Resumen

Para la elaboración de la cartografía de Colombia se utilizan las proyecciones Gauss-Krüger y cartesiana. El Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC) encargado de la producción de la cartografía oficial, estableció una nueva proyección con único origen geográfico denominada «Origen Nacional». El objetivo del presente trabajo es comparar la deformación de arcos geodésicos proyectados a planos Gauss-Krüger, cartesiano y al Origen Nacional. En el proceso se tomaron arcos de 10, 30, 50, y 70 kilómetros distribuidos en 34 zonas del país y se proyectaron a los planos mencionados. Como resultados a destacar: Arcos de 50 kilómetros proyectados al plano Gauss-Krüger presentan deformaciones de centímetros ubicados sobre el meridiano origen; al extremo del plano de proyección alcanzan deformaciones de 18 metros. En la proyección cartesiana la deformación es lineal y directamente proporcional a la altitud del plano de proyección. En el «Origen Nacional», las deformaciones se presentan por defecto y por exceso, es decir los vectores se hacen más cortos sobre el meridiano origen del plano de proyección y en el límite se hacen más largos unos 240 metros. Para áreas extensas el origen nacional ofrece mayor facilidad de cálculos, pero las deformaciones son mucho mayores que la proyección Gauss-Krüger.

Abstract

Gauss-Krüger and Cartesian projections are used to prepare the cartography of Colombia. The Agustín Codazzi Geographical Institute (IGAC) in charge of the production of the official cartography, established a new projection with a single geographical origin called "National Origin". The objective of the present work is to compare the deformation of geodesic arcs projected to Gauss-Krüger, Cartesian planes and to the National Origin. In the process, arches of 10, 30, 50, and 70 kilometers were taken distributed in 34 areas of the country and projected to the plans mentioned. As results to be highlighted: 50-kilometer arches projected onto the Gauss-Krüger plane show deformations of centimeters located on the meridian of origin; to the end of the plane of projection reach deformations of 18 meters. In the Cartesian projection the deformation is linear and directly proportional to the altitude of the projection plane. In the "National Origin", the deformations are presented by default and by excess, that is, the vectors become shorter on the meridian origin of the projection plane and at the limit they become longer by about 240 meters. For large areas the national origin offers easier calculations, but the deformations are much greater than the Gauss-Krüger projection.

Palabras clave: Proyección Cartesiana, Transversa de Mercator, Proyección Gauss-Kruger, Arco geodésico, Plano de proyección.

Keywords: Cartesian projection, Transverse Mercator, Gauss-Kruger projection, Geodesic arc, Projection plane.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es determinar y comparar la deformación que sufren los arcos elipsóidicos al ser proyectados a los planos: Gauss-Krüger, Cartesiano y al Origen Nacional, se espera despejar las incertidumbres generadas con el establecimiento de la nueva proyección cartográfica para Colombia, respecto a si la misma ofrece mayor exactitud que las que actualmente se utilizan en la producción cartográfica del país. La nueva proyección cartográfica es una «Transversa de Mercator» secante, con esta característica su uso no es común, mientras que la misma pero tangente es usada en múltiples países. Al realizar la comparación de las deformaciones de los arcos geodésicos al ser proyectados a distintos planos, se está haciendo un aporte con sustento numérico y cuantitativo el cual permitirá a los productores de mapas y planos cartográficos, así como a los usuarios de la cartografía tomar decisiones en su uso, o cuando deban utilizar mapas y cartografía elaborados con el nuevo «Origen Nacional».

1.1 GENERALIDADES DE LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

Sin importar si los usuarios de los mapas son o no expertos, lo que ellos esperan es que la información suministrada por los mapas esté ajustada a la realidad. Los usuarios de mapas y de planos cartográficos, esperan que las geoposiciones de puntos, magnitudes de vectores y las áreas representadas y medidas sobre los mapas sean iguales a las del terreno o muy cercanas. Sin embargo, en el proceso de proyectar una superficie curva en una plana, no es posible garantizar ciento por ciento la fidelidad de las magnitudes de los elementos proyectados; ya en el año 1775, el matemático Leonhard Euler (1707-1783), demostró que una proyección no puede ser al mismo tiempo equivalente, conforme y equidistante (Torres, 2005).

Los planos y los mapas cartográficos son frecuentemente utilizados sin el conocimiento apropiado de sus propiedades y limitaciones (Martín, 2015), posiblemente por que muy pocos usuarios se interesan por datos como la precisión, las limitaciones, la proyección utilizada, marco de referencia, sistemas de coordenadas, la técnica utilizada en su elaboración y demás características; por otra parte porque en la mayoría de los casos los mapas no brindan dicha información.

Prescindir del efecto de la elipticidad de la tierra no es sencillo, y para el diseño de métricas que permitan reducir dicho efecto al pasar porciones de superficies elipsóidicas a superficies planas, se requiere entender las bases matemáticas y geométricas de las proyecciones, así mismo se requiere el manejo de conceptos de trigonometría esférica, geometría analítica, cálculo infinitesimal y geodesia

(Martín, 2015); este conocimiento queda delegado a los expertos; mientras que para usuarios de mapas y planos cartográficos no tan expertos les basta conocer los metadatos o datos básicos para tomar decisiones para un uso adecuado. Para entender el problema de las proyecciones cartográficas, de una manera intuitiva, basta entender que para cubrir un balón con losas (baldosas), y que este conserve su forma, se requieren losas lo más pequeñas posible, así mismo para representar en un plano de manera fiel una porción de terreno, basta con hacerlo en un plano lo más pequeño que sea viable.

El origen de las proyecciones de una esfera a un plano se remite al siglo IV a. c. con los sabios griegos, estas, las proyecciones surgen con el objeto de hacer planos de la esfera celeste, así mismo para el caso de la representación de porciones de la esfera terrestre. El inicio de las proyecciones fue meramente geométrico, es decir no se aplicaron modelos matemáticos. El gran logro de los geómetras griegos fue el de proyectar la esfera no a un plano directamente, sino a una superficie desenrollable, la cual estaría más cerca de la esfera, por tanto, las deformaciones ocasionadas por la proyección serían mínimas; así la superficie que se utilizó inicialmente fue el cilindro (Martín, 2015). A Eratóstenes de Cirene (276-196 a. c.), se le atribuye la idea de emplear un cilindro tangente en el Ecuador terrestre, para proyectar la esfera sobre dicho cilindro; en el mismo sentido Marino de Tiro (siglo I d. c.), ideó una solución especial, con un cilindro secante (Suay Artal, 2000).

En principio, las proyecciones cartográficas fueron netos desarrollos geométricos, hasta que el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) creó la Geometría Analítica; y mediante ésta, fue posible sustituir las líneas geométricas por las ecuaciones que las representan sobre un plano definido por un sistema de ejes X, Y, al cual se le denominó plano cartesiano; en este, inicialmente se representaron líneas rectas mediante coordenadas y posteriormente se representaron todo tipo de líneas. Así, el sistema cartesiano fue aplicado a la cartografía, y siendo posible el establecimiento de ecuaciones, estas permitieron fijar algunas condiciones de entrada para alcanzar las características requeridas. En el mismo sentido con la invención del cálculo infinitesimal fue posible formular matemáticamente las ecuaciones de proyecciones como la de Mercator para dar una solución definitiva al problema de las proyecciones cartográficas (Martín, 2015).

Identificada la importancia de la carta cartográfica para los países y territorios, en el siglo XIX muchos países emprendieron la construcción de los mapas nacionales; expertos en cada uno de los países, realizaron los respectivos análisis, a fin de que el mapa nacional tuviera la menor anamorfosis posible, es decir que mostrara los territorios

representados en un plano con alta fidelidad. Así cada país seleccionó una proyección teniendo en cuenta su forma, sus dimensiones y su posición geográfica. Colombia hizo lo propio así que, hacia el año de 1940 ingenieros vinculados al Instituto Geográfico Militar y Catastral (IGM y C), realizaron estudios para definir cuál sería la proyección adecuada para Colombia.

1.2 PROYECCIÓN UTILIZADA EN LA CARTA GEOGRÁFICA DE COLOMBIA.

En Colombia se utilizan principalmente las coordenadas elipsoidales (ϕ , λ , h), las coordenadas rectangulares cartesianas geocéntricas (X , Y , Z); así mismo coordenadas proyectadas: planas de Gauss-Krüger y cartesianas locales (IGAC, 2004).

1.2.1 ANTECEDENTES.

Algunos de los primeros mapas del territorio colombiano fueron elaborados por Francisco José de Caldas «El Sabio Caldas» hacia el año 1803, siendo levantados y dibujados en coordenadas geográficas latitud y longitud. Así mismo la carta corográfica del territorio de la Nueva Granada levantada por la comisión corográfica fue elaborada en coordenadas geográficas; dicha comisión, dirigida por el coronel Agustín Codazzi, levantó las cartas cantonales y provinciales y la descripción de itinerarios militares, entre los años de 1850 a 1859. En el mismo sentido, la Oficina de Longitudes y Fronteras establecida en 1902, continuaría con la misión de actualizar y mantener la carta general de Colombia, dado que dicha carta se consideró desde esa época, como una herramienta fundamental para el análisis de proyectos, presupuestos de las vías de comunicación y en los procesos de la formación de un catastro general. Para la elaboración de la carta de Colombia la Oficina de Longitudes utilizó la proyección sinusoidal, esta proyección es equiárea, los paralelos de latitud son líneas rectas y equidistantes, y la escala a lo largo del meridiano central y a lo largo de cada paralelo no se modifica (Seong, 2002).

El 13 de agosto de 1934 se expide un decreto mediante el cual se aprobaba la creación del Instituto Geográfico Militar, el cual, mediante la utilización de tecnologías y métodos modernos, se encargaría de realizar el levantamiento del mapa de Colombia. En el año 1940 el Instituto Geográfico Militar se organiza mediante el decreto número 153, y pasa a ser dependencia del Ministerio de Hacienda y Crédito Público, con el nombre de Instituto Geográfico Militar y Catastral.

Hacia 1940 los ingenieros Darío Rozo Martínez y Belisario Arjona E., realizaron un análisis geométrico y matemático para definir la proyección que se debía utilizar en la elaboración de la carta básica del territorio colombiano.

De dicho estudio se derivan las siguientes recomendaciones: La carta debía servir para: Fines militares; elección de rutas de vías de comunicación; itinerarios aéreos, terrestres y marítimos; planes preliminares de sistemas de irrigación y estimaciones (Rozo, 1942), dado que la carta básica debía servir para múltiples estudios ingenieriles que se adelantarán en un territorio.

Con base en los estudios realizados por los ingenieros Rozo y Arjona, en el año 1942 el IGM y C adoptó la proyección conforme de Gauss-Krüger para la construcción de la carta geográfica de Colombia, por ser conveniente, dada la forma geométrica y posición del territorio sobre el globo terráqueo. La carta geográfica elaborada por el IGM y C tuvo como base una red astrogeodésica establecida por la oficina de Longitudes y Fronteras dirigida por uno de los mejores científicos que ha tenido Colombia, el ingeniero Julio Garavito Armero. Dicha red se establece con una precisión de segundo orden, cuantitativamente dicho orden equivale a distancias medidas con precisión de 1:20.000 (FGCC, 1984).

En 1944 el ingeniero Darío Rozo Martínez realizó un estudio de la proyección sinusoidal comparándola con la proyección Transversa Gauss-Krüger, llegando a resultados altamente favorables para esta última, al respecto el ingeniero Rozo escribió: «La ventaja de la proyección Gauss está en que la forma no se pierde, lo que es de gran utilidad con respecto al público, interesado en el Catastro y conserva los rumbos que es condición necesaria para la milicia [...]» (Rozo, 1944).

1.2.2 PROYECCIÓN GAUSS- KRÜGER

En 1882, Carl Friedrich Gauss ideó una proyección cilíndrica con propiedades similares a la proyección Mercator, con la variación de que el cilindro sería tangente a un meridiano cualquiera en lugar de al Ecuador. El procedimiento propuesto por Gauss fue desarrollado íntegramente por Ludwig Krüger en 1912 (Campos, 2016); y debido al aporte de los dos, la proyección se conoce con el nombre de -Proyección Gauss-Krüger-.

Algunas características de la proyección Gauss-Krüger, son: Área: La distorsión aumenta con la distancia al meridiano central. Dirección: Los ángulos locales son precisos en todos los lugares. Distancia: Escala precisa a lo largo del meridiano central cuando el factor de escala es 1,0. Cuando es inferior a 1,0, aparecen dos líneas rectas a escala exacta a ambos lados del meridiano central y equidistantes de él. Limitaciones: Los datos de un esferoide o elipsoide no pueden proyectarse a más de 90° del meridiano central. Para alcanzar deformaciones inferiores a 1:1.000, habrá que limitarse a una región de unos 300 kilómetros a uno y otro lado de la isométrica de base (Sevilla, 1986).

1.2.2.1 MÉTRICA DE LAS COORDENADAS GAUSS-KRÜGER

Las ecuaciones (1) y (2) corresponden a la versión utilizada por el IGAC para realizar la transformación de coordenadas elipsoidales a coordenadas planas Gauss-Krüger.

Coordenada Norte

$$N = N_0 + (G(\varphi_p) - G(\varphi_0)) + \frac{t}{2} N l^2 \cos^2 \varphi_p + \frac{t}{24} N \cos^4 \varphi_p (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 + \frac{t}{720} N \cos^6 \varphi_p (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) l^6 + \frac{t}{40320} N \cos^8 \varphi_p (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) l^8 \quad (1)$$

Coordenada Este

$$E = E_0 + N l \cos \varphi_p + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi_p (1 - t^2 + \eta^2) l^3 + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi_p (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) l^5 + \frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi_p (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) l^7 \quad (2)$$

Siendo:

$$l = \lambda_p - \lambda_0$$

$$t = tg\varphi_p$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_p$$

N: gran normal calculada en el punto en consideración

a y b: semiejes mayor y menor del elipsoide sobre el cual se calcula.

$G(\varphi_0)$: Arco de meridiano desde el ecuador hasta el punto origen

$$G(\varphi_0) = \alpha[\varphi_0 + \beta \sin 2\varphi_0 + \gamma \sin 4\varphi_0 + \delta \sin 6\varphi_0 + \varepsilon \sin 8\varphi_0]$$

$G(\varphi_p)$: Arco de meridiano desde el ecuador hasta el punto de cálculo

$$G(\varphi_p) = \alpha[\varphi_p + \beta \sin 2\varphi_p + \gamma \sin 4\varphi_p + \delta \sin 6\varphi_p + \varepsilon \sin 8\varphi_p]$$

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 \right)$$

$$\beta = -\frac{3}{2} n + \frac{9}{16} n^3 - \frac{3}{32} n^5$$

$$\gamma = \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4$$

$$\delta = -\frac{35}{48} n^3 + \frac{105}{256} n^5$$

$$\varepsilon = \frac{315}{512} n^4$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}$$

Las ecuaciones (1) y (2) se tomaron de (IGAC, 2004)

1.2.3 PROYECCIÓN CARTESIANA

El sistema de proyección cartesiana es una representación conforme del elipsoide sobre un plano paralelo a uno tangente al elipsoide de referencia (en este caso es el GRS80), ubicado a una altitud ortométrica (H). El punto origen del plano de proyección se define sobre la altitud media del territorio a representar; la proyección del meridiano que pasa por este punto representa el plano el eje Norte-Sur. Los puntos sobre el elipsoide y los resultantes de la proyección al plano tienen una relación puramente matemática.

La proyección cartesiana es utilizada para la elaboración de planos de áreas pobladas (planos cartográficos representados a escalas iguales o mayores que 1:2.000), así que pueden existir tantos orígenes de coordenadas cartesianas como centros poblados existan, también es posible crear orígenes de acuerdo con las necesidades. Las ecuaciones (3) y (4) permiten realizar la proyección de las coordenadas elipsoidales a coordenadas planas cartesianas.

$$N(mts) = N_o \mp \frac{1}{B} (\Delta\phi C E^2) K_e \quad (3)$$

$$E(mts) = E_o \mp \frac{\Delta\lambda''}{H} K_n \quad (4)$$

Donde:

$\Delta\phi$: Diferencia de latitud entre el punto en consideración y el origen cartesiano (en segundos).

$\Delta\lambda$: Diferencia de longitud entre el punto en consideración y el origen cartesiano (en segundos).

$$H: \frac{\sec(\phi)}{N \cdot \text{arc}1''}$$

N: Radio de curvatura en el primer vertical.

ϕ : Latitud del punto que se desea calcular.

$$C: \frac{Tg(\phi)}{2RN \cdot \text{arc}1''}$$

$$B: \frac{1}{R \cdot \text{arc}1''}$$

$$E: \Delta\lambda'' N \cdot \text{arc}1'' \cos \phi$$

R: Radio de curvatura en el meridiano.

$$K: \frac{P+h}{P}; P: \text{radio de curvatura de la tierra. h: altura del punto sobre el nivel del mar.}$$

Las ecuaciones (3) y (4) fueron tomadas de (IGAC., 1980)

Las ecuaciones (3) y (4) fueron replanteadas y/o reestructuradas llegando a las ecuaciones (5) y (6), mediante estas ecuaciones se realiza actualmente la proyección de coordenadas elipsoidales a cartesianas locales.

$$N = \rho_{\varphi_o} \left[\Delta\varphi_{rad} + \frac{\tan(\varphi_o) \Delta\lambda_{rad}^2 v_{\varphi_p}^2 \cos^2 \varphi_p}{2\rho_{\varphi_o} v_{\varphi_o}} \right] * \left[1 + \frac{Hp}{\rho_{\varphi_m}} \right] + N_o \quad (5)$$

$$E = \Delta\lambda_{rad} v_{\varphi_p} \cos(\varphi_p) \left[1 + \frac{Hp}{v_{\varphi_o}} \right] + E_o \quad (6)$$

Donde:

ϕ_0 : Latitud geodésica del punto origen.

ϕ_P : Latitud geodésica del punto a transformar.

$\Delta\lambda$: diferencia de longitudes entre el punto origen y el punto a transformar.

H_p : Altitud ortométrica del punto origen del plano.

ρ : radio de curvatura en el meridiano.

v : Radio de curvatura en el primer vertical.

E_0 = Coordenada plana este del punto origen.

N_0 = Coordenada plana norte del punto origen.

Las ecuaciones (5) y (6) fueron tomadas de (IGAC, 2004)

1.2.4 PROYECCIÓN TRANSVERSA DE MERCATOR- CARACTERÍSTICAS GENERALES

Esta Proyección corresponde a una adaptación particular de la proyección UTM, cuyas ecuaciones se conforman a partir de un conjunto de aproximaciones en serie que convergen rápidamente en una zona que se extiende de 3° a 4° de longitud desde el meridiano central. En husos mayores a 4°, la serie tiene términos insuficientes para la precisión requerida (Snyder, 1987). La transformación de las coordenadas elipsoidales a planas transversa de Mercator se realiza mediante las ecuaciones (7), (8) y (9).

$$x = k_0 N \left[A + (1 - T + C) \frac{A^3}{6} + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2) \frac{A^5}{120} \right] \quad (7)$$

$$y = k_0 \left\{ (M - M_0) + N \tan \phi \left[\frac{A^2}{2} + (5 - T + 9C + 4C^2) \frac{A^4}{24} + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2) \frac{A^6}{720} \right] \right\} \quad (8)$$

$$k = k_0 \left[1 + (1 + C) \frac{A^2}{2} + (5 - 4T + 42C + 13C^2 - 28e'^2) \frac{A^4}{24} + (61 - 148T + 16T^2) \frac{A^6}{720} \right] \quad (9)$$

Donde:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$N = \frac{a}{[1 - e^2 \sin^2 \phi]^{\frac{1}{2}}}$$

$$T = \tan^2 \phi$$

$$C = e'^2 \cos^2 \phi$$

$$A = (\lambda - \lambda_0) \cos \phi, \text{ con } \lambda \text{ y } \lambda_0 \text{ en radianes}$$

$$M_t = a \left[\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} \right) \phi - \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin 2\phi + \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} \right) \sin 4\phi - \left(\frac{35e^6}{3072} \right) \sin 6\phi \right]$$

Donde:

Los radios de elipse meridiana (M_p y M_0) se obtienen mediante la ecuación (10) y corresponden: M_p al arco desde el ecuador al punto en consideración y M_0 al arco desde el ecuador hasta el punto origen, y se calculan con O_p y O_0 respectivamente.

Las ecuaciones (8), (9) y (10) fueron tomadas de (Snyder, 1987)

1.2.5 NUEVA PROYECCIÓN CARTOGRÁFICA PARA COLOMBIA

Con fecha de 14 de mayo de 2020, el IGAC emite la resolución No. 471, mediante la cual, entre otras directrices, establece como proyección cartográfica única para Colombia la Proyección Transversa de Mercator «**Origen Nacional**». Así, en el Artículo 4. *Lineamientos técnicos generales, establece: «[...] La proyección cartográfica será definida en un único origen de coordenadas, con parámetros establecidos en la tabla 1».*

Tabla 1. Parámetros de la proyección

Parámetro	Valor
Proyección	Transversa de Mercator
Elipsoide	GRS80
Origen. Latitud	4° N
Origen. Longitud	73° W
Falso Este	5.000.000
Falso Norte	2.000.000
Unidades	Metros
Factor de escala	0,9992

*Tabla Tomada de la resolución N°. 471, publicada por el IGAC.

El factor de escala menor a 1, hace que la proyección sea secante al elipsoide de referencia. La nueva proyección se aplicará sobre un Huso geográfico de 12° de amplitud, seis grados a cada lado del meridiano origen, no se tuvo en cuenta la característica de que dicha proyección más allá de los 4° las distorsiones se incrementan de manera considerable. El origen geográfico se localiza a 6,65 kilómetros al sur oeste de la población de Puerto López en el departamento del Meta.

2. PROCEDIMIENTO

2.1 DETERMINACIÓN DE LA DEFORMACIÓN DE UN ARCO GEODÉSICO AL SER PROYECTADO A UN PLANO

Un arco geodésico se define como aquel segmento de línea geodésica el cual debe cumplir dos propiedades: ser el menor camino entre dos puntos y estar completamente contenido sobre la superficie dada (Vázquez, 2008), en este caso la superficie del elipsoide de referencia.

La teoría de las proyecciones cartográficas advierte sobre la deformación que sufren los elementos geométricos al ser proyectados de una superficie elipsoidal a una plana; como ya se mencionó, ninguna proyección garantiza fidelidad completa en las áreas y vectores proyectados.

Para determinar la deformación que sufre un arco que es proyectado desde la superficie del elipsoide de revolución a

diferentes planos, se proyectan las coordenadas elipsoidales (ϕ_i, λ_i) y (ϕ_j, λ_j) extremas del arco a un plano determinado. En este caso se tomaron 34 arcos geodésicos en zonas adecuadamente distribuidas en el territorio colombiano, como se muestra en la figura 1.

- Las abreviaturas usadas en la imagen corresponden a:
- Z-W-i: Zona (i) ubicada sobre el meridiano del origen oeste.
 - Z-L-W-i: Zona (i), ubicada sobre Límite del origen oeste.
 - Z-B-i: Zona (i), ubicada sobre el meridiano del origen Bogotá.
 - Z-L-B-i: Zona (i), ubicada sobre Límite del origen Bogotá.
 - Z-E-i: Zona (i), ubicada sobre el meridiano del origen Este.
 - Z-L-E-i: Zona (i), ubicada sobre Límite del origen Este.
 - Z-EE-i: Zona (i), ubicada sobre el meridiano del origen Este-Este.
 - Z-L-EE-i: Zona (i), ubicada sobre Límite del origen Este-Este. (con $i=1, 2, \dots, 7$)

Los vectores se ubicaron en las zonas a lo largo de los meridianos correspondientes a los orígenes Gauss-Krüger usados en Colombia, como se muestra en la figura 1. Se tomaron cuatro orígenes (W, B, E y EE), los demás orígenes están en su mayor parte en zona marítima. Cada uno de los vértices

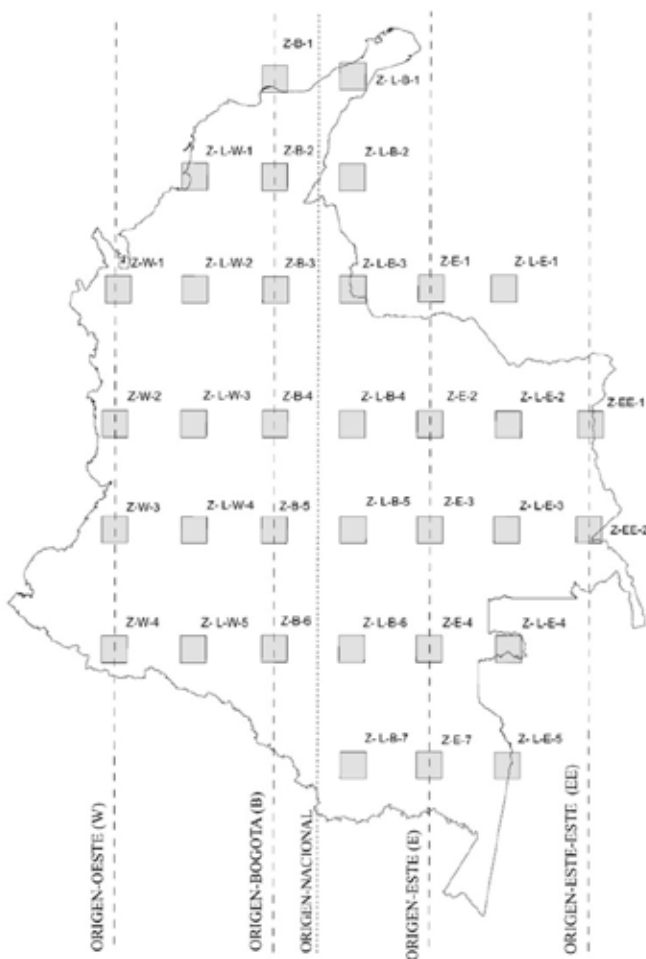


Figura 1. Zonas seleccionadas en las cuales se realizó la proyección de los vértices de los vectores geodésicos a los planos Gauss-Krüger; Origen Nacional y Castesiano Local.

Tabla 2. Coordenadas elipsoidales que se proyectaron para el cálculo de la deformación de los arcos geodésicos

id	ZONA	ϕ_i	λ_i	ϕ_j	λ_j	id	ZONA	ϕ_i	λ_i	ϕ_j	λ_j		
		°	°	°	°			°	°	°	°		
1	ZW1	7.76	N 77.24	W 7.44	N 76.92	W	18	ZLB3	7.76	N 72.74	W 7.44	N 72.42	W
2	ZW2	4.76	N 77.24	W 4.44	N 76.92	W	19	ZLB4	4.76	N 72.74	W 4.44	N 72.42	W
3	ZW3	2.76	N 77.24	W 2.44	N 76.92	W	20	ZLB5	2.76	N 72.74	W 2.44	N 72.42	W
4	ZW4	0.76	N 77.24	W 0.44	N 76.92	W	21	ZLB6	0.76	N 72.74	W 0.44	N 72.42	W
5	ZLW1	9.76	N 75.74	W 9.44	N 75.41	W	22	ZLB7	1.76	S 72.74	W 2.08	S 72.42	W
6	ZLW2	7.76	N 75.74	W 7.44	N 75.42	W	23	ZE1	7.76	N 71.24	W 7.44	N 70.92	W
7	ZLW3	4.76	N 75.74	W 4.44	N 75.42	W	24	ZE2	4.76	N 71.24	W 4.44	N 70.92	W
8	ZLW4	2.76	N 75.74	W 2.44	N 75.42	W	25	ZE3	2.76	N 71.24	W 2.44	N 70.92	W
9	ZLW5	0.76	N 75.74	W 0.44	N 75.42	W	26	ZE4	0.76	N 71.24	W 0.44	N 70.92	W
10	ZB1	11.76	N 74.24	W 11.44	N 73.91	W	27	ZE5	1.76	S 71.24	W 2.08	S 70.92	W
11	ZB2	9.76	N 74.24	W 9.44	N 73.91	W	28	ZLE1	7.76	N 69.74	W 7.44	N 69.42	W
12	ZB3	7.76	N 74.24	W 7.44	N 73.92	W	29	ZLE2	4.76	N 69.74	W 4.44	N 69.42	W
13	ZB4	4.76	N 74.24	W 4.44	N 73.92	W	30	ZLE3	2.76	N 69.74	W 2.44	N 69.42	W
14	ZB5	2.76	N 74.24	W 2.44	N 73.92	W	31	ZLE4	0.76	N 69.74	W 0.44	N 69.42	W
15	ZB6	0.76	N 74.24	W 0.44	N 73.92	W	32	ZLE5	1.76	S 69.74	W 2.08	S 69.42	W
16	ZLB1	11.76	N 72.74	W 11.44	N 72.41	W	33	ZEE1	4.76	N 68.24	W 4.44	N 67.92	W
17	ZLB2	9.76	N 72.74	W 9.44	N 72.41	W	34	ZEE2	2.76	N 68.24	W 2.44	N 67.92	W

extremos que forman los arcos geodésicos se proyectaron a planos Gauss-Krüger, al plano de la nueva proyección Origen Nacional, e igualmente sobre planos cartesianos locales. Para realizar la proyección de los vértices a cada plano, se utilizaron los modelos matemáticos correspondientes, los cuales están incluidos en este documento.

En la tabla 2, se muestran las coordenadas elipsoidales (ϕ_i , λ_i), (ϕ_j , λ_j) y la altitud ortométrica del vértice i (H_i), con estas coordenadas se conformaron los arcos que se proyectaron a los diferentes planos (Gauss-Krüger, Origen Nacional y Cartesiano Local), y así calcular la deformación de los vectores al pasar de una superficie elipsoidal a una plana.

3. RESULTADOS

En la figura 2 se muestra la deformación que sufre un vector de 50 kilómetros proyectado a los planos: Gauss-Krüger, Origen Nacional y Cartesiano local; los vectores se ubicaron en las zonas indicadas en la figura 1. De manera general la más baja deformación del vector se presenta al proyectarlo al plano cartesiano local; en el

plano Gauss-Krüger la mayor deformación es de unos 17,16 metros, mientras que en el plano del «Origen Nacional», la mayor deformación está cerca de los 147,8 metros. Para el caso de arcos con distintas magnitudes proyectados a los planos ya mencionados, los resultados se muestran más adelante.

3.1.1 DEFORMACIÓN DE ARCOS CON DISTINTAS MAGNITUDES PROYECTADOS A LOS PLANOS GAUSS-KRÜGER, CARTESIANO Y ORIGEN NACIONAL

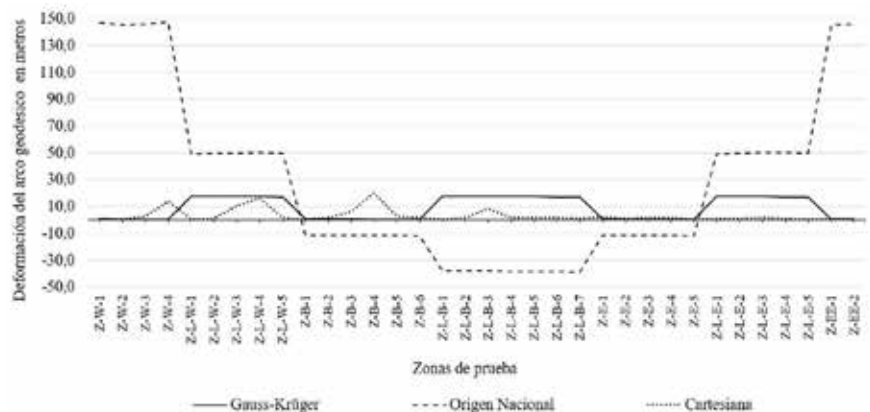


Figura 2. Deformación de un arco geodésico de 50 kilómetros, proyectado a los planos: Gauss-Krüger; Origen Nacional y Cartesiano local

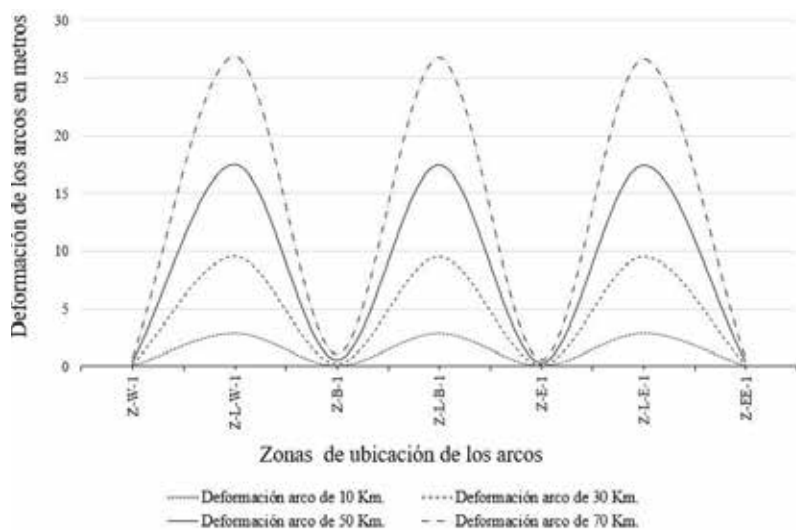


Figura 3. Deformación de arcos geodésicos de distintas magnitudes proyectados a planos Gauss-Krüger; a diferentes distancias del origen de proyección.

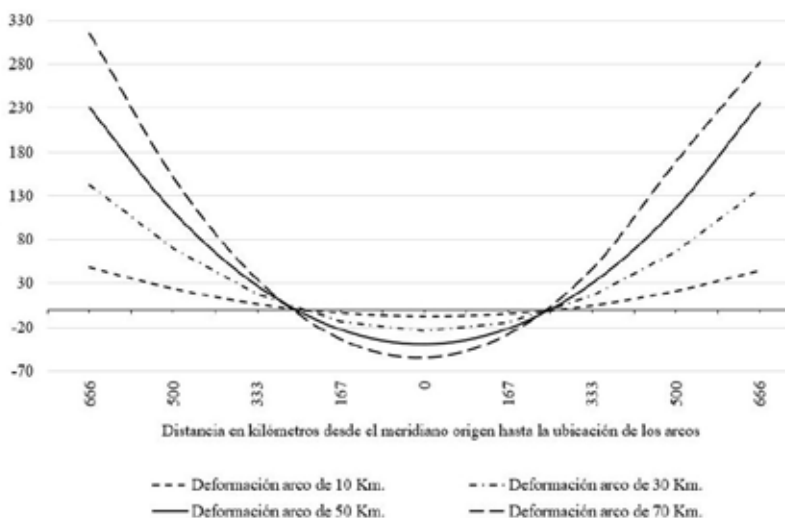


Figura 4. Deformación de arcos geodésicos de distintas magnitudes proyectados al plano de Origen Nacional, a distintas distancias del origen de proyección

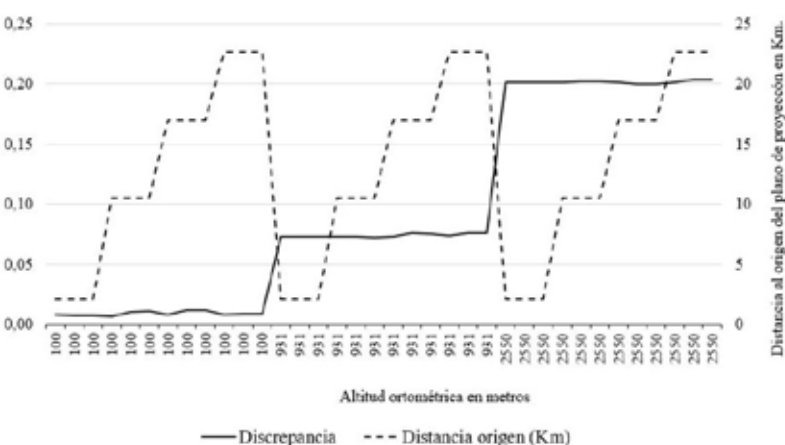


Figura 5. Deformación de arcos geodésicos de 500 metros, proyectados a planos cartesianos locales.

3.1.1.1 DEFORMACIÓN EN EL PLANO GAUSS-KRÜGER

Para hallar la deformación de un arco geodésico proyectado al plano Gauss-Krüger, se usaron arcos de 10, 30, 50 y 70 kilómetros, cada uno de ellos ubicados en las zonas indicadas en la figura 1, la deformación de los vectores proyectados se presenta según lo que predice la teoría de dicha proyección; es decir la deformación se incrementa en la medida que los puntos proyectados se alejan del meridiano origen de proyección. En la figura 3 se muestra que la deformación de los arcos siempre se da por exceso dada la naturaleza tangente de la proyección, la deformación cuando el arco está cerca del meridiano origen de proyección esta alrededor de 8 ppm, mientras si el vector está en límite del huso de proyección, su deformación no pasa de 325 ppm.

3.1.1.2 DEFORMACIÓN EN EL PLANO ORIGEN NACIONAL

En el plano de la proyección Origen Nacional, se usaron igualmente vectores de 10, 30, 50 y 70 kilómetros, dichos vectores se deforman de acuerdo con la condición geométrica secante de la proyección. En la figura 4, se observa que los vectores presentan siempre una deformación, ya sea por defecto o por exceso, en el primer caso cuando los vectores se encuentran a menos de 250 Km del meridiano origen, y por defecto cuando se encuentran a una distancia superior a esta. Así, para un vector de 70 Km, la menor deformación que sufre es de 410 ppm, mientras que, su mayor deformación es de 4.800 ppm.

3.1.1.3 DEFORMACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO LOCAL

Dado que el plano cartesiano es usado en la proyección de pequeñas áreas, para la determinación de la deformación de los arcos, se tomaron arcos de 500 metros en tres centros poblados, los cuales se ubican a 100, 931 y 2.550 metros de altitud ortométrica. Como se observa en la figura 5, la distancia a la cual se ubica el arco desde el origen de proyección no contribuye de manera manifiesta la deformación de los arcos, mientras que la altitud ortométrica afecta directamente, produciendo una deformación de unas 16 ppm por cada 100 metros de altitud.

3.1.2 DEFORMACIÓN DE LAS ÁREAS PROYECTADAS

Para determinar la deformación que presenta una superficie proyectada desde el elipsoide de referencia a cada uno de los planos ya mencionados, se formó un triángulo sobre el elipsoide, con base en las coordenadas (ϕ , λ) y utilizando la métrica del problema geodésico inverso, se hallaron los arcos geodésicos y como los arcos se eligieron que fueran perpendiculares, el ángulo entre dichos arcos se tomó de 45° , y mediante la ecuación (11) se calcularon las áreas respectivas. Así mismo una vez proyectados los vectores se formaron triángulos planos en las respectivas zonas, el área de dichos triángulos fue obtenida mediante la fórmula de Herón la cual se muestra en la ecuación (12),

$$Area = 1/2 * b * c * \text{seno}(A) \quad (11)$$

Donde:

b y c son arcos de un triángulo geodésico, y A el ángulo entre estos vectores.

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (12)$$

donde:

a, b, y c son los lados de un triángulo plano.

$$s = (a+b+c)/2$$

3.1.2.1 DEFORMACIÓN DEL ÁREA DE UN POLÍGONO ELIPSOIDICO AL SER PROYECTADO AL PLANO GAUSS-KRÜGER

La deformación de una superficie al ser proyectada a un plano Gauss-Krüger sigue el mismo comportamiento que el advertido para los vectores, es decir la menor deformación se presenta cuando las superficies están cerca del meridiano origen de proyección, mientras que aquellas que están en el límite del origen, sufren la mayor deformación, esto se puede ver en la figura 6. Desde lo cuantitativo para un área de 625 Km^2 tiene su menor deformación por exceso de $0,042 \text{ Km}^2$, equivalente a 67 ppm, mientras que la mayor deformación es de $1,12 \text{ Km}^2$, equivalente a 1.800 ppm.

3.1.2.2 DEFORMACIÓN DEL ÁREA DE UN POLÍGONO ELIPSOIDICO AL SER PROYECTADO AL PLANO CARTESIANO LOCAL

La deformación de una superficie al ser proyectada a un plano cartesiano local es directamente proporcional a la altitud ortométrica del punto origen de proyección de dicho plano, es decir a mayor altitud en que se halle el plano de proyección, mayor será la deformación, esto se puede ver en la figura 7. Para un área de 625 Km^2 tiene una deformación por exceso de $0,291 \text{ Km}^2$, equivalente a 466 ppm, mientras que la mayor deformación se presenta para un área de $625,7 \text{ Km}^2$ con una deformación igualmente por exceso de $0,982 \text{ Km}^2$, equivalente a 1.570 ppm.

3.1.2.3 DEFORMACIÓN DEL ÁREA DE UN POLÍGONO ELIPSOIDICO AL SER PROYECTADO AL PLANO ORIGEN NACIONAL

La deformación de una superficie al ser proyectada al plano de la nueva proyección «Origen Nacional» sigue el mismo patrón que el presentado en el caso de los vectores, como se puede ver en la figura 8, así sobre el meridiano origen del plano de proyección un área de 625 Km^2 , tiene una deformación de un Km^2 por defecto, es decir el área se hace más pequeña, este valor equivale a 1.594 ppm. Mientras que la menor deformación se ubica a una distancia de 167 km del meridiano origen del plano de proyección, allí un área de $624,5 \text{ Km}^2$ tiene una deformación por defecto de $1,6\text{E}-5 \text{ Km}^2$, equivalente a 15 ppm, mientras que la mayor deformación se presenta a 666 Km del meridiano origen del plano de proyección, allí un área de $624,8 \text{ Km}^2$ sufre una deformación por exceso de $6,2 \text{ Km}^2$, equivalente a 9.875 ppm.

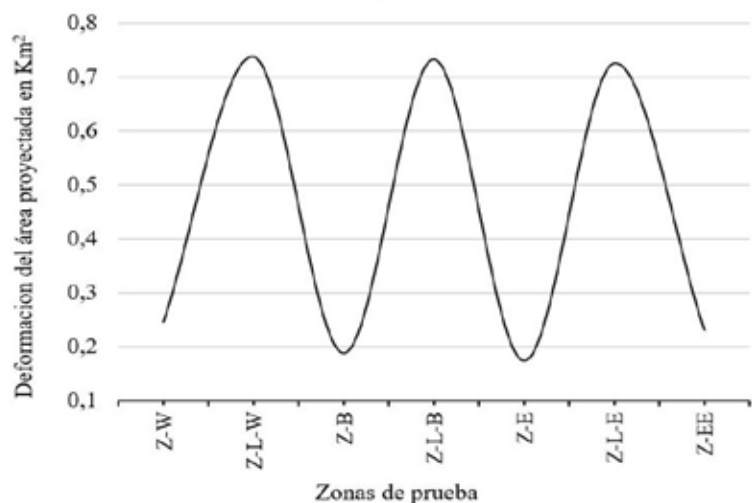


Figura 6. Discrepancias de las áreas calculadas sobre el plano Gauss-Krüger con respecto a las áreas sobre el elipsoide de referencia

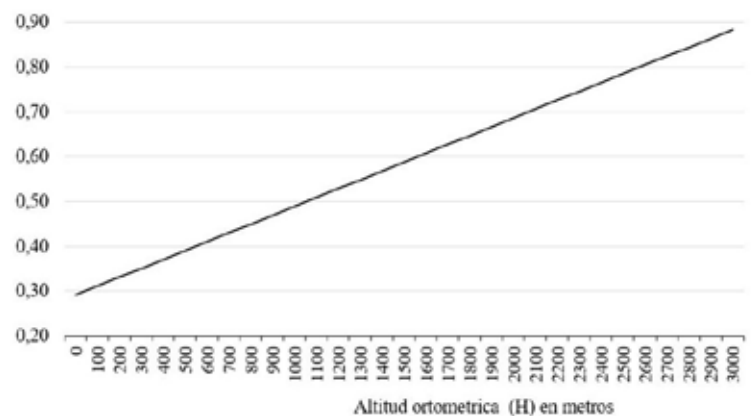


Figura 7. Discrepancias de las áreas calculadas sobre el plano Gauss-Krüger con respecto a las áreas sobre el elipsoide de referencia

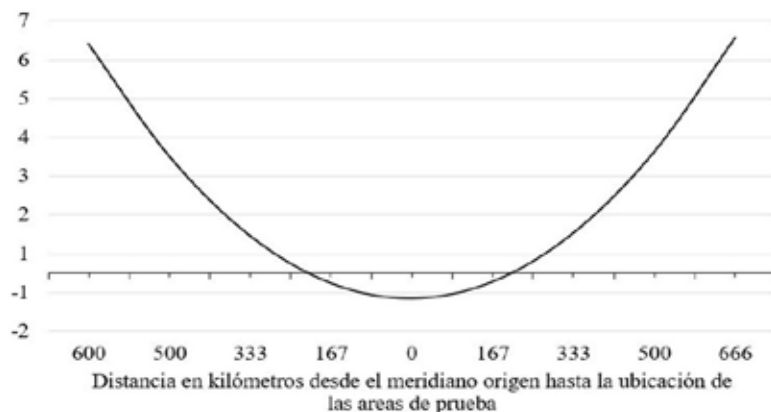


Figura 8. Discrepancias de las áreas calculadas sobre el plano Origen Nacional con respecto a las áreas sobre el elipsoide de referencia

4. CONCLUSIONES

1. Cuando se tengan que elegir las distancias óptimas para establecer orígenes cartesianos, para minimizar las deformaciones, no sólo se deben tener en cuenta la extensión de los planos de proyección y las distancias al punto origen de proyección, se debe considerar también la altitud ortométrica donde se ubiquen los puntos orígenes de los planos de proyección, dado que la deformación de los vectores y por ende las áreas tienen una relación directa creciente con la altitud ortométrica.
2. Las deformaciones de los arcos en la proyección Gauss-Krüger solo son influenciadas por la distancia al meridiano origen, así, para minimizar las deformaciones, los husos geográficos o amplitud de los planos debe ser menor a unos 165 kilómetros, con lo cual las características de la actual proyección Gauss-Krüger usada en Colombia es apropiada.
3. Para la nueva proyección «Origen Nacional»; se debe tener en cuenta que la extensión del territorio nacional de este a oeste en la parte continental es de 1.391 Km, y el meridiano origen se ubica muy cerca de la media de esta distancia, la mayor distancia entre el meridiano origen y el extremo es de unos 695 Km, a esta distancia los vectores sufren una distorsión de unas 5.122 ppm; esta deformación supera en más de 4.790 ppm a la deformación máxima que sufre el mismo vector en la proyección Gauss-Krüger.
4. Las áreas proyectadas cumplen los mismos patrones a los presentados en los vectores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Campos, J. D. (2016). Técnicas de representación de los "you-are-here maps" e imagen de la ciudad: análisis y aplicación al patrimonio construido, centros históricos. Tesis doctoral UDC.

FGCC. (1984). Standards and specifications for geodetic control networks. Rockville, Maryland: Federal Geodetic Control Committee.

IGAC. (2004). Aspectos prácticos de la adopción del marco geocéntrico nacional de referencia MAGNA SIRGAS como Datum oficial de Colombia. Bogotá: Subdirección de Geografía y Cartografía. Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

IGAC. (1980). Red de Triangulación Fundamental del D.E. Vértices Topográficos de la Ciudad de Bogotá. Bogotá. Bogotá: IGAC. Bogotá: IGAC.

Martín, L. J. (2015). Historia de las Proyecciones Cartográficas. Madrid: Centro Nacional de Información Geográfica (CNIG).

Rozo, M. D. (1942). Sistema de Proyección para la Carta Geográfica de Colombia. Bogotá: Instituto Geográfico Militar y Catastral.

Rozo, D. M. (1944). Estudio de la proyección sinusoidal para el mapa de Colombia. Revista de la academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales correspondiente de la española, 527-535.

Seong, J. C. (2002). The sinusoidal projection: A new importance in relation to global image data. The Professional Geographer, 218-225.

Sevilla, M. J. (1986). Cartografía matemática. Topografía y Cartografía, 11-22.

Snyder, J. P. (1987). Map projections--A working manual (Vol. 1395). US Government Printing Office.

Suay Artal, J. (2000). Análisis pormenorizado de un problema crucial de Geografía Matemática: la determinación del punto. Alicante: Universidad de Alicante.

Torres, R. I. (2005). Lo que Euler le dijo al cartógrafo (1ª parte). . Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria, (27), 81-106.

Vázquez, A. V. (2008). Aplicación de las matemáticas en el primer enlace geodésico entre Europa y África. Mapping, (124), 52-56.

Sobre el autor

Edilberto Niño-Niño

Ingeniero Catastral y Geodesta, especialista en Ciencias Astronómicas, máster en Ciencias de la Información y las Comunicaciones. Desde el año 2008 docente en las áreas de Astronomía y Geodesia en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas -Bogotá Colombia-.